UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ANCONA

Dipartimento di Matematica «Vito Volterra»

I.R.R.S.A.E. - MARCHE

con il patrocinio del
Dipartimento di Matematica
"Vito Volterra"

Conferenza su

"LA GEOMETRIA PROJETTIVA"

Relatore: Prof. CARLO FELICE MANARA

Ancona, 17-18 Maggio 1995

60131 ANCONA, ITALIA · Via Brecce Bianche · Segreteria tel. 071/5893485-5893484 · E-mail: Dipmat@ANVAX2.CINECA.IT

ANCONA 1995.

GEOMETRIA PROIETTIVA.

PRECURSORI

Girard Desargues [1591-1661]

Blaise Pascal [1623-1662]

FONDATORI

Jean-Victor Poncelet [1788-1867]

Karl Kristian von Staudt [1798-1867]

Jacob Steiner [1796-1863].

CONVENZIONI
Lo spazio ampliato con gli elementi impropri (o elementi all'infinito).

Le convenzioni si giustificano osservando che gli elementi impropri possono essere considerati come dei "contenuti" degli assiomi. Inoltre se si amplia il gruppo di trasformazioni alle quali si pensa di poter sottoporre le figure, gli elementi chiamati "impropri" possono essere trasformati in elementi propri, nel senso abituale del termine.

FORME GEOMETRICHE FONDAMENTALI.

Di prima specie.

1) La retta punteggiata: l'elemento e' il punto ed il sostegno e' la retta. Dal punto di vista metrico elementare si hanno 2 possibili realizzazioni.

2) Il fascio di piani: l'elemento e' il piano ed il sostegno e' l'asse. Dal punto di vista metrico elementare si hanno due possibili realizzazioni.

3) Il fascio di rette: l'elemento e' la retta ed il sostegno e'costituito da un piano e da un punto (centro del fascio) che giace sul piano. Dal punto di vista metrico elementare si possono avere 3 possibili realizzazioni.

Di seconda specie.

1) Piano punteggiato: l'elemento e' il punto ed il sostegno e' il piano. Dal punto di vista metrico elementare si hanno due realizzazioni possibili.

2) Piano rigato: l'elemento e' la retta ed il sostegno e' il piano. Dal punto di vista metrico elementare si hanno due realizzazioni possibili.

3) Stella di rette. L'elemento e' la retta ed il sostegno e' un punto (centro della stella).
Dal punto di vista metrico elementare vi sono due realizzazioni possibili.

4) Stella di piani. L'elemento e' il piano ed il sostegno e' un punto (centro della stella).
Dal punto di vista metrico elementare si possono avere due realizzazioni possibili.

Di terza specie.

1) Spazio di punti. L'elemento e' il punto ed il sostegno e' l'intero spazio ampliato.

2) Spazio di piani. L'elemento e' il piano ed il sostegno e' l'intero spazio ampliato.

OSSERVAZIONE 1 - Si puo' rilevare una simmetria verbale nelle definizioni delle forme fondamentali: infatti, considerata una frase che definisce una forma, se in essa si scambiano tra loro le parole "punto" e "piano", lasciando al suo posto ogni parola "retta" [e facendo ovviamente i ritocchi che sono richiesti dalla grammatica della nostra lingua] da una frase che definisce una forma geometrica fondamentale si ottiene una seconda frase che pure definisce una forma fondamentale. Questa seconda non sempre e' diversa dalla prima: per esempio la frase che definisce il fascio di rette (insieme di tutte le rette che passano per un punto e giacciono in un piano) si muta in se stessa con gli scambi citati.
Parte da qui l'insieme di considerazioni svolte da Gergonne [Joseph Gergonne , 1771-1859], che condussero alle leggi di dualita', nel piano e nello spazio.

OSSERVAZIONE 2 - In ogni forma di specie 2 o 3 sono contenute infinite forme di specie inferiore.

METODO DI PONCELET.

Due specie di invarianti: gli invarianti grafici (di pura posizione) e gli invarianti metrico-proiettivi.

Costruzione degli invarianti metrico-proiettivi.

CONVENZIONI DELLA RETTA ORIENTATA.

Dati due punti A, B su una retta, indicheremo con il simbolo "AB" il numero reale che e' la misura del segmento, rispetto ad una unita' di misura fissata, numero che viene preso con il segno positivo o negativo a seconda che il segmento sia percorso da A verso B in senso concorde oppure contrario a quello stabilito come positivo sulla retta.

Ovviamente se e' $A=B$ si ha $AA=0$.

Relazione fondamentale:

(1) $$AB + BC + CA = 0.$$

In particolare se e' $C=A$ si ottiene:

(2) $$AB + BA = 0.$$

OSSERVAZIONE 3 - Queste relazioni sono alla base della definizione delle coordinate cartesiane (ascisse su una retta).

Infatti, scelto un sistema di coordinate ascisse ed indicate con a e b rispettivamente le coordinate di A e B, in forza delle relazioni fondamentali si ha la nota formula:

(3) $$AB = b-a.$$

Dalle relazioni scritte si trae la nota RELAZIONE DI EULERO:

(4) $$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0.$$

RAPPORTO SEMPLICE di tre punti su una retta.

Siano tre punti distinti A, B, C su una retta; poniamo:

(5) $$(ABC) = AC/BC.$$

Il numero reale (5) non dipende dalla unita' di misura scelta per i segmenti, ne' dalla scelta dell'orientazione positiva sulla retta; esso dipende dall'ordine in cui i punti sono enunciati nel simbolo (5): si ha infatti:

(6) $$\begin{aligned} (ABC) &= k &;\quad (BAC) &= 1/k;\\ (ACB) &= 1-k &;\quad (CAB) &= 1/(1-k);\\ (BCA) &= (k-1)/k &;\quad (CBA) &= k/(k-1). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 4 - Fissati sulla retta due punti A e B, e considerato un punto variabile X, la funzione:

(7) $$F(X) = (ABX)$$

e' definita per ogni punto della retta diverso da B. La corrispondenza tra il valore del F ed il punto X e' biunivoca. Inoltre il modulo di tale valore tende all'infinito quando X tende a B, e tende ad 1 quando X si allontana indefinitamente da A e da B sulla retta.
Quindi F(X) puo' servire come coordinata del punto X sulla retta. Dato che sia il valore di F(X), rappresentato per es. mediante il rapporto di due segmenti, la costruzione di X a partire da A e B si ottiene fondandosi sul teorema di Talete.

BIRAPPORTO di quattro punti su una retta.

Siano A, B, C, D quattro punti distinti su una retta. Poniamo:

$$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = AC.BD/AD.BC. \tag{8}$$

Il numero (8) viene chiamato "birapporto" o anche "rapporto anarmonico" dei quattro punti. Si verificano con calcolo diretto, dalla formula definitoria, le seguenti proprieta':

$$(ABCD) = (CDAB) = (DCBA) = (BADC). \tag{9}$$

Inoltre si ha :

$$\begin{aligned} (ABCD) &= k \quad &;\quad (ABDC) &= 1/k \\ (ACBD) &= 1-k \quad &;\quad (ACDB) &= 1/(1-k) \\ (ADBC) &= (k-1)/k \quad &;\quad (ADCB) &= k/(k-1). \end{aligned} \tag{10}$$

OSSERVAZIONE 5 - Fissati sulla retta tre punti distinti A, B, C e considerato un punto variabile X, la funzione:

$$G(X) = (ABCX) \tag{11}$$

e' definita per ogni punto X diverso da A. La corrispondenza tra il valore di G(X) ed il punto e' biunivoca; inoltre il modulo di G(X) tende all'infinito quando X si avvicina ad A, e tende al valore (ABC) quando X si allontana indefinitamente da A (e quindi anche da B e da C). Pertanto G(X) puo' servire come coordinata del punto X sulla retta. Anche in questo caso, fissati i punti A, B, C e dato il valore di G(X), per es. mediante il rapporto di due segmenti, la costruzione del punto X avviene per via elementare.

TEOREMA DI MENELAO e sue conseguenze (Teorema di Ceva).

Teorema di invarianza del birapporto.

Definizione di birapporto di quattro elementi su una qualunque forma di prima specie.

Le operazioni fondamentali di proiezione e sezione.

Proiettivita' tra forme di prima specie. Teorema fondamentale. Costruzione della proiettivita'.

Caso delle forme sovrapposte. Involuzione e criterio di involutorieta'.

Quadrangolo e quadrilatero piani completi. Teorema di Desargues. Gruppi armonici di punti su una punteggiata e di rette in un fascio. K.K. von Staudt e la sua costruzione della geometria proiettiva come "geometria di posizione" (Geometrie der Lage) a partire dal gruppo armonico, definito in modo puramente grafico.

La configurazione piana di Desargues e la configurazione spaziale del pentaedro. Teorema dei triangoli omologici.La configurazione di Pappo-Pascal.
Corrispondenze prospettive tra forme di seconda specie.
Prodotti di prospettivita' tra forme di seconda specie.
Omologia tra due piani sovrapposti.

Le sezioni dei cono rotondo (coniche).

Omologia generatrice di una conica. Teoremi di Steiner per le coniche luogo di punti.

Teorema di Pascal. Birapporto di quattro punti su una conica e proiettivita' fra coniche.

Polarita' rispetto ad una circonferenza e teorema di reciprocita'.
Dualita' nel piano.

Polarita' rispetto ad una conica.

La conica inviluppo. Teoremi di Steiner e di Brianchon.

Le quadriche rigate.